BULOVA (PREKIDAČKA) ALGEBRA

Zakoni formalno-logičkog mišljenja i zaključivanja zasnivaju se na tvrđenju koje može biti istinito ili neistinito, ali nikada delimično istinito ili delimično neistinito. Ove zakone u obliku prostih i složenih sudova ili iskaza dao je veliki grčki filozof Aristotel.

Godine 1854. engleski matematičar Džordž Bul, u delu *Istraživanje zakona mišljenja*, prvi put predlaže da se ovi zakoni opišu algebarskim relacijama. Iz ovog dela se rađa nova matematička disciplina, nazvana *algebra logike* ili, popularno, *Bulova algebra*. Do početka Drugog svetskog rata smatralo se da je algebra logike jedan slučajni, apstraktni misaoni sistem koji ne može imati nikakvih praktičnih posledica, pa je bio skoro zaboravljen i odbačen. Međutim, Bulova algebra je našla svoju pravu tehničku primenu u razvoju digitalnih računskih mašina i digitalne tehnike uopšte, koja predstavlja jednu od najvećih tehničkih revolucija.

Mogućnost izražavanja formalno-logičkog zaključivanja algebarskim operacijama koje se vrše po poznatim pravilima algebre dozvoljava da se proces formalno-logičkog zaključivanja lako kvantitativno izrazi, tehnički realizuje i automatizuje.

4.1 AKSIOMI I OSNOVNA PRAVILA

Može se pokazati da su algebra sudova (iskaza) i algebra skupova posebni slučajevi jednog šire definisanog matematičkog sistema koji se zove algebra logike, ili Bulova algebra. Bulova algebra je deduktivni matemetički sistem koji počiva na aksiomima pomoću kojih se dalje dokazuju teoreme. Na taj način se iz dokaza izbacuju intuitivni elementi, očiglednost geometrijske ili fizičke interpretacije, a kao jedini dokazni materijal koriste se navedeni aksiomi.

Neka skup $S = \{X, Y, Z, U, V, W, ...\}$ sadrži minimalno dva različita elementa. Na ovom skupu se definišu dve interne binarne operacije, koje se označavaju znakom "+" i znakom "·". Da bi skup S i operacije "+" i "·" sačinjavali Bulovu algebru, neophodno je da budu zadovoljeni aksiomi nazvani aksiomi Hantingtona. To su:

A.1-Binarne interne operacije su komutativne na skupu S i poseduju odliku distributivnosti jedna prema drugoj, tj. ako za svako $X \cdot Y \cdot Z \in S$ važi:

$$X + Y = Y + X \; ; \quad X \cdot Y = Y \cdot X$$
$$X \cdot (Y+Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z); \quad X + (Y \cdot Z) = (X+Y) \cdot (X+Z)$$

A.2-Binarne interne operacije poseduju na skupu S različite neutralne elemente 1 i 0, tako da za svako $X \in S$ postoji element $0, 0 \in S$, tako da je:

$$X + 0 = X$$

i za svako $X \in S$ postoji $1 \in S$, tako da je :

$$X \cdot 1 = X$$

A.3-Na skupu S svaki element, $X, X \in S$, ima jedinstven inverzan element $\overline{X}, \overline{X} \in S$, tako da je:

$$X + \overline{X} = 1 \qquad X \cdot \overline{X} = 0$$

Važna osobina Bulove algebre, koja sledi direktno iz navedenih aksioma, jeste *princip dualnosti*. Svi su aksiomi dati u parovima, posebno za operaciju "+", posebno za operaciju "·". Ako se izvrši zamena "+" sa "·" i 1 sa 0, onda se, polazeći od aksioma za "+" operaciju, dobijaju njima dualni - simetrični aksiomi za "·" operaciju.

4.2 ZAKONI I TEOREME

Iz navedena tri aksioma Bulove algebre izvode se teoreme koje se dokazuju pomoću ovih aksioma. Teoreme su date takođe u simetričnim parovima (dualno) i dokazuju se simetričnim–dualnim aksiomima.

T.1. Teorema o idempotentnosti

$$X + X = X; \qquad X \cdot X = X$$

dokaz:

$$X+X=(X+X)\cdot 1=(X+X)\cdot(X+\overline{X})=X+(X\cdot\overline{X})=X+0=X$$

$$X\cdot X=(X\cdot X)+0=(X\cdot X)+(X\cdot\overline{X})=X\cdot(X+\overline{X})=X\cdot 1=X$$

T.2. Teorema o "0" elementima

$$X + 1 = 1; \qquad X \cdot 0 = 0$$

dokaz:

$$X+1=(X+1)\cdot 1=(X+1)\cdot(X+\overline{X})=X+(\overline{X}\cdot 1)=X+\overline{X}=1$$

$$X\cdot 0=(X\cdot 0)+(X\cdot\overline{X})=X\cdot(0+\overline{X})=X\cdot\overline{X}=0$$

T.3. Teorema o involuciji

$$(\overline{\overline{X}})=X$$

dokaz:

iz $X+\overline{X}=1$ i $X\cdot\overline{X}=0$ sledi:

$(\overline{X})+(\overline{\overline{X}})=1$ i $(\overline{X})\cdot(\overline{\overline{X}})=0$,

što znači da je X jedinstvena negacija veličine $\overline{X}$.

T.4. Teorema o apsorpciji

$$X+(X\cdot Y) = X; \quad X\cdot(X+Y) = X$$

dokaz:

$$X+(X\cdot Y)=(X\cdot 1)+(X\cdot Y)=X\cdot(1+Y)=X\cdot 1=X$$

$$X\cdot(X+Y)=(X\cdot X)+(X\cdot Y)=X+(X\cdot Y)=X$$

Napomena. U prvom delu ovog dokaza, pored A.1 i A.2 korišćena je T.2. Drugi deo dokaza je sveden na dokazani prvi deo.

T.5. Teorema o asocijativnosti

$$X+(Y+Z)=(X+Y)+Z; \qquad X\cdot(Y+Z)=(X\cdot Y)\cdot Z$$

Dokaz ove teoreme se izvodi na sličan način kao i dokazi prethodnih teorema, ali pošto zauzima dosta prostora, ovde je izostavljen.

T.6. De Morganovi zakoni

$$(\overline{X+Y})=\overline{X}\cdot\overline{Y}; \qquad (\overline{X\cdot Y})=\overline{X}+\overline{Y}$$

Dokaz: s obzirom na A.3. dokazuje se najpre da je :

$$(X+Y)+(\overline{X}\cdot\overline{Y})=1 \qquad (X+Y)\cdot(\overline{X}\cdot\overline{Y})=0$$

odnosno: $(X+Y)+(\overline{X}\cdot\overline{Y})=\{(X+Y)+\overline{X}\}\cdot\{(X+Y)+\overline{Y}\}=\{(X+\overline{X})+Y\}\cdot\{X(Y+\overline{Y})\}=$
$=\{1+Y\}\cdot\{1+X\}=1\cdot 1=1$

$$(X+Y)\cdot(\overline{X}\cdot\overline{Y})=X\cdot(\overline{X}\cdot\overline{Y})+Y\cdot(\overline{X}\cdot\overline{Y})=(X\cdot\overline{X})\cdot Y+(Y\cdot\overline{Y})\cdot X=0\cdot\overline{Y}+0\cdot\overline{X}=0+0=0,$$

što znači da je: $(X+Y)+(\overline{X}\cdot\overline{Y})=1=(X+Y)+(\overline{X+Y})$

$$(X+Y)\cdot(\overline{X}\cdot\overline{Y})=0=(X+Y)\cdot(\overline{X+Y}),$$

odakle sledi da je: $(\overline{X}\cdot\overline{Y})=(\overline{X+Y})$.

Drugi deo De Morganove teoreme može se dokazati analognim putem, korišćenjem principa dualnosti.

Pirsova funkcija [illegible] po definiciji ima vrednost 1 ($Z = 1$) samo ako su sve nezavisno promenljive nula. Ako bilo koja od promenljivih (jedna ili više) ima vrednost 1, funkcija je nula. Tabela 5.2 predstavlja kombinacionu tabelu Pirsove funkcije, iz koje se može napisati disjunktivna forma:

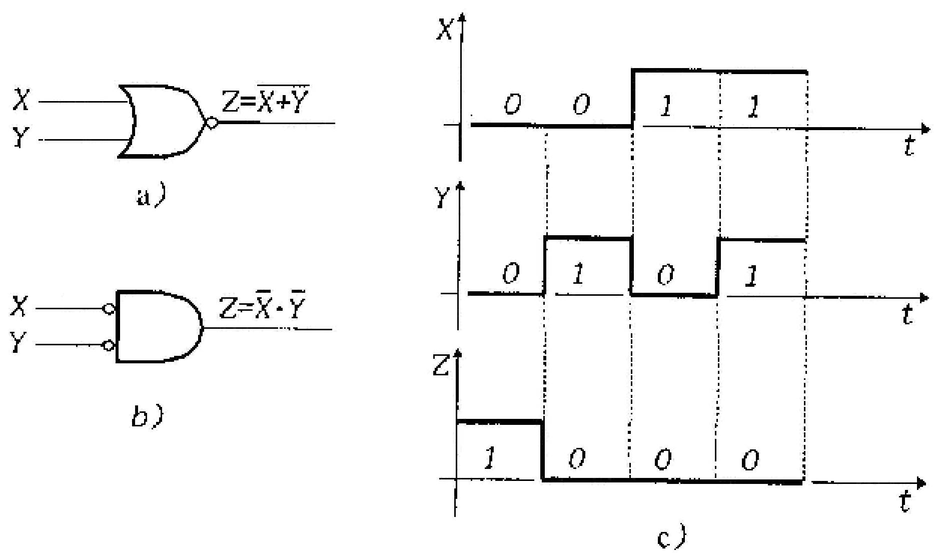
$$Z = \overline{X} \cdot \overline{Y}. \tag{5-3}$$

Primenom De Morganovih zakona na ovu jednačinu dobija se:

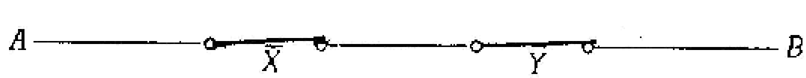
$$Z = \overline{X + Y}. \tag{5-4}$$

To znači da se Pirsova funkcija može realizovati pomoću ILI kola i invertora, pa se stoga to kolo naziva NILI kolo (engl. NOR gate, slika 5.6.a). Realizacija NILI kola prema jednačini (5-3) ostvaruje se prvo negiranjem nezavisno promenljivih (ulaza), pa onda njihovim propuštanjem kroz I kolo, kao na slici 5.6.b).

Jednačina (5-3) je pogodna za realizaciju NILI kola i u relejno-kontaktnoj tehnici (slika 5.7). U kolu na ovoj slici između tačaka A i B postojaće galvanska veza ($Z = 1$) samo u slučaju kada je $X = Y = 0$. Tada su mirni kontakti zatvoreni, odnosno $\overline{X} = \overline{Y} = 1$ (relei nisu pobuđeni).



Sl. 5.6. Logičko NILI kolo

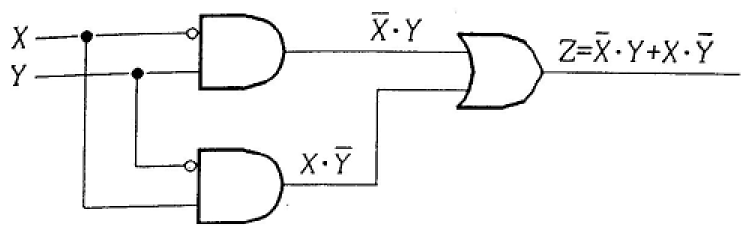


Sl. 5.7. Relejno NILI kolo

Ekskluzivna disjunkcija ima vrednost 1 kada samo jedna od nezavisno promenljivih ima logičku vrednost 1. U svim ostalim slučajevima je $Z = 0$. Pošto je u drugoj i trećoj vrsti $Z = 1$, disjunktivna forma funkcije će biti:

$$z = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}. \tag{5-5}$$

Jednačina (5-5) pokazuje da će realizacija ove funkcije pomoću I, ILI kola i invertora izgledati kao na slici 5.8.



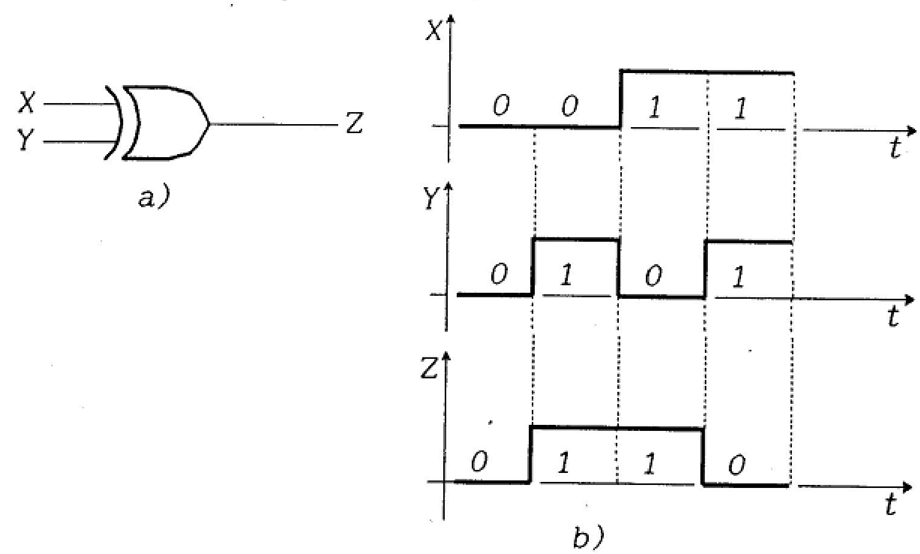
Sl. 5.8. Realizacija ekskluzivne ILI funkcije

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

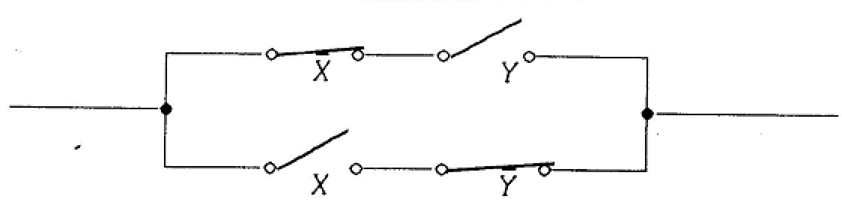
Tabela 5.3

Ekskluzivno ILI kolo je kolo koje realizuje funkcija ekskluzivne disjunkcije i označava se posebnim simbolom (slika 5.9.a). Na slici 5.9.b) rad ovog kola je ilustrovan talasnim oblicima napona na ulazima i izlazu.

Ekvivalentna kontaktna šema sledi iz jednačine (5-5). U slučaju dve promenljive, odnosno dva ulazna kola, funkcija Z će biti 1 ako se te promenljive međusobno razlikuju (slika 5.10).



Sl. 5.9. Ekskluzivno ILI kolo



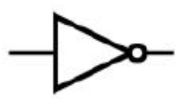
Sl. 5.10. Relejno ekskluzivno ILI kolo

Funkcija ekvivalencije F_9 u tabeli 4.5 dobija se negacijom ekskluzivne funkcije:

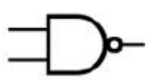
$$Z = \overline{X}\cdot\overline{Y} + X\cdot Y. \qquad (5\text{-}6)$$

Ona ima vrednost 1 kada su nezavisno promenljive jednake. Kolo koje realizuje funkciju ekvivalencije naziva se *komparator*.

Osnovna logička kola

<table>
<tr><th>Operacija</th><th>Simbol</th><th>Booleov izraz</th><th>Tablica istine</th></tr>
<tr><td>I (AND)</td><td></td><td>$A \cdot B$</td><td><table><tr><th colspan="2">ULAZ</th><th>IZLAZ</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A AND B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>ILI (OR)</td><td></td><td>$A + B$</td><td><table><tr><th colspan="2">ULAZ</th><th>IZLAZ</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A AND B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>NE (NOT)</td><td></td><td>$\bar{A}$</td><td><table><tr><th>ULAZ</th><th>IZLAZ</th></tr><tr><td>A</td><td>NOT A</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

IZVEDENA logička kola

<table>
<tr><th>Operacija</th><th>Simbol</th><th>Booleov izraz</th><th>Tablica istine</th></tr>
<tr><td>NI (NAND)</td><td></td><td>$\overline{A \cdot B}$</td><td><table><tr><th colspan="2">ULAZ</th><th>IZLAZ</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A NAND B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>NILI (NOR)</td><td></td><td>$\overline{A + B}$</td><td><table><tr><th colspan="2">ULAZ</th><th>IZLAZ</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A NOR B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>XILI (XOR)</td><td></td><td>$A \oplus B$</td><td><table><tr><th colspan="2">ULAZ</th><th>IZLAZ</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A XOR B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>XNILI (XNOR)</td><td></td><td>$\overline{A \oplus B}$</td><td><table><tr><th colspan="2">ULAZ</th><th>IZLAZ</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>A XNOR B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
</table>